Chapitre 41

Espaces préhilbertiens réels

Plan du chapitre

1 Produit scalaire . . . **1**
- 1.1 Définition . . . 1
- 1.2 Produits scalaires usuels . . . 2
- 1.3 Espaces préhilbertiens réels, espaces euclidiens . . . 4

2 Norme euclidienne . . . **4**
- 2.1 Définition . . . 5
- 2.2 Identités des normes euclidiennes . . . 6
- 2.3 Inégalité de Cauchy-Schwarz . . . 6
- 2.4 Autres inégalités des normes euclidiennes . . . 8
- 2.5 Distances euclidiennes . . . 9

3 Orthogonalité . . . **10**
- 3.1 Vecteurs orthogonaux . . . 10
- 3.2 Orthogonal d'une partie d'un e.v. . . . 10

4 Familles et bases orthonormées . . . **13**
- 4.1 Familles orthogonales et orthonormées . . . 13
- 4.2 Bases orthonormées . . . 15

5 Supplémentaire orthogonal, projection orthogonale . . . **16**
- 5.1 Supplémentaire orthogonal . . . 16
- 5.2 Projection orthogonale . . . 18
- 5.3 Distance à un s.e.v. de dimension finie . . . 19

6 Algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt . . . **21**

7 Méthodes pour les exercices. . . . **26**

Hypothèse

Dans tout ce chapitre, E désigne un $\mathbb{R}$-e.v.
À partir de la section 2, E désigne un espace préhilbertien réel, dont on note $\langle\cdot|\cdot\rangle$ le produit scalaire et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée (cf définitions plus loin).

1 Produit scalaire

1.1 Définition

On rappelle la définition de forme bilinéaire (sur le $\mathbb{R}$-e.v. E) :

Définition 41.1 – Forme bilinéaire

On dit que $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ est une forme bilinéaire si φ est linéaire par rapport à chacune de ses 2 variables :

- Pour tout y_0 dans E, l'application suivante est linéaire :

$$\begin{aligned} \varphi(\bullet, y_0) : E &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \varphi(x, y_0) \end{aligned}$$

- Pour tout x_0 dans E, l'application suivante est linéaire :

$$\begin{aligned} \varphi(x_0, \bullet) : E &\to \mathbb{R} \\ y &\mapsto \varphi(x_0, y) \end{aligned}$$

Remarque. Pour tout $y \in E$, on a $\varphi(0_E, y) = 0$ et de même $\varphi(x, 0_E) = 0$.

Définition 41.2

Soit φ une forme bilinéaire sur E. On dit que :

- φ est symétrique si
- φ est positive si
- φ est définie si

On dira que φ est définie positive si φ est définie et positive.

Définition 41.3 – Produit scalaire

Soit $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$. On dit que φ est un produit scalaire sur E si :

1. φ est bilinéaire.
2. φ est symétrique.
3. φ est définie positive.

Pour tous $x, y \in E$, le réel $\varphi(x, y)$ est appelé le produit scalaire de x et y. La notation $\varphi(x, y)$ n'a rien d'universel : on emploiera surtout la notation $\langle x \,|\, y \rangle$, mais les notations $\langle x, y \rangle$, $(x \mid y)$ ou encore $x \cdot y$ sont assez courantes.

1.2 Produits scalaires usuels

Exemple 1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit l'application $\langle \bullet \mid \bullet \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ par :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n \qquad \langle x \,|\, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

avec $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $(y_i)_{1 \leq i \leq n}$ les coordonnées de x et y dans la base canonique $\mathcal{B}_c$ de $\mathbb{R}^n$. L'application $\langle \bullet | \bullet \rangle$ est appelée le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$.

Remarque. En notant $X = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_c}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_c}(y) = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, alors (en identifiant $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}$) :

$$X^\top Y =$$

Exemple 2. Soit $E = \mathscr{C}^0(\left[0,1\right],\mathbb{R})$. On définit l'application $\langle \bullet \mid \bullet \rangle : E \times E \to \mathbb{R}$ par :

$$\forall f, g \in E \qquad \langle f \mid g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$$

Montrer que l'application $\langle \bullet \mid \bullet \rangle$ définit un produit scalaire sur E.

Pour tous $f, g \in E$, comme f et g sont continues et à valeurs dans $\mathbb{R}$, alors $\langle f \mid g \rangle$ est bien défini et est un réel.

Exemple 3. Soit $n, p \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. On définit l'application $\langle \cdot | \cdot \rangle : E \times E \to \mathbb{R}$ par :

$$\langle A | B \rangle = \mathrm{Tr}(A^\top B) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Il s'agit du produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

Exemple 4. Sur $\mathbb{R}[X]$ ou $\mathbb{R}_n[X]$, il existe de nombreux produits scalaires différents, par exemple :

$$\forall P, Q \in \mathbb{R}[X] \qquad \langle P | Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)dt$$

$$\forall P, Q \in \mathbb{R}_n[X] \qquad \langle P | Q \rangle = P(0)Q(0) + \ldots + P(n)Q(n)$$

Il n'y a pas de produit scalaire particulier qui est usuel / canonique.

1.3 Espaces préhilbertiens réels, espaces euclidiens

Définition 41.4

On dit que (E, φ) est un un espace préhilbertien réel si φ est un produit scalaire défini sur (le $\mathbb{R}$-e.v.) E. Si de plus E est de dimension finie, alors (E, φ) est appelé un espace euclidien.

On omettra souvent de préciser le produit scalaire φ et on dira juste "E est un espace préhilbertien / euclidien".

Exemple 5. $\mathbb{R}^n$ est un espace ....
$\mathscr{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ est un espace ....
$\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est un espace ....

Théorème 41.5

Soit E un espace préhilbertien réel. Soit F un s.e.v. de E. Alors l'application

$$\begin{aligned} \psi : F \times F &\to \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto \langle x | y \rangle \end{aligned}$$

est un produit scalaire sur F.

Ainsi F est un (sous-)espace préhilbertien réel, une fois muni du produit scalaire induit ψ.

2 Norme euclidienne

Hypothèse

Dans le reste du chapitre, E désigne un espace préhilbertien réel, dont on note $\langle \cdot | \cdot \rangle$ le produit scalaire et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée (cf définition ci-dessous).

2.1 Définition

Définition 41.6

On appelle norme euclidienne sur E associée au produit scalaire $\langle \cdot | \cdot \rangle$, l'application

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : \quad & E \to \mathbb{R}_+ \\ & x \mapsto \|x\| = \sqrt{\langle x | x \rangle} \end{aligned}$$

La notation $\|\cdot\|$ n'a rien d'officiel, même si, une fois le produit scalaire défini, on sous-entend souvent que $\|\cdot\|$ est la norme associée à ce produit scalaire s'il n'y a pas ambiguité.

Exemple 6. On munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire canonique. Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$:

$$\|x\| = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Exemple 7. On munit $E = \mathscr{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ du produit scalaire de l'Exemple 2. Pour tout $f \in E$:

$$\|f\| = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Théorème 41.7

La norme euclidienne $\|\cdot\|$ vérifie les propriétés suivantes :

1. **Homogénéité** :
2. **Séparation** :
3. **Inégalité triangulaire** :

Cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire : Pour tous $x, y \in E$, on a $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$ si et seulement si x et y sont positivement liés, càd :

$$\exists \lambda \in \boxed{\mathbb{R}_+} \qquad x = \lambda y \quad \text{ou} \quad y = \lambda x$$

Démonstration. Soit $x, y \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

1.

2.

3. L'inégalité triangulaire et le cas d'égalité sera prouvée ultérieurement.

□

Remarque. Si E' est un $\mathbb{R}$-e.v. (pas forcément un espace préhilbertien réel), on appelle norme sur E' toute application $N : E' \to \mathbb{R}_+$ qui vérifie les assertions 1–2–3 ci-dessus (sans le cas d'égalité). Une telle norme n'est pas nécessairement une norme euclidienne, i.e. il n'existe pas forcément un produit scalaire φ sur E' tel que $N(x) = \sqrt{\varphi(x,x)}$.

Remarque. La propriété de séparation est en fait une équivalence : pour tout $x \in E$, on a :

$$\|x\| = 0 \iff x = 0_E$$

Le sens réciproque vient du fait que $\|0_E\| = (0_E \mid 0_E) = 0$ car $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est une forme bilinéaire.

2.2 Identités des normes euclidiennes

Théorème 41.8 – Identités remarquables

Soit $x, y \in E$.

- $\|x+y\|^2 =$
- $\|x-y\|^2 =$
- $\|x\|^2 - \|y\|^2 =$
- $(x \mid y) =$ (identités de polarisation)

Démonstration. On ne montre que la première assertion et la troisième. Pour la première :

Pour la troisième :

□

Remarque. L'identité de polarisation permet notamment d'exprimer le produit scalaire uniquement en fonction de la norme. En particulier, si une norme $\|\bullet\|$ est euclidienne, i.e. construite à partir d'un produit scalaire, alors il n'y a qu'un produit scalaire possible associé à $\|\bullet\|$.

2.3 Inégalité de Cauchy-Schwarz

Théorème 41.9 – Inégalité de Cauchy-Schwarz

Pour tous $x, y \in E$, on a :

Cas d'égalité : il y a égalité ci-dessus si et seulement si (x, y) est une famille liée.

Démonstration. On montre que l'inégalité et le cas d'égalité sont vérifiés dans deux cas séparés : d'abord si $y = 0_E$, puis si $y \neq 0_E$.

□

Exemple 8. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $(b_i)_{1 \leq i \leq n}$ deux familles de réels. Montrer que

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2 \right)$$

Exemple 9. Écrire l'inégalité de Cauchy-Schwarz sur l'espace préhilbertien $E = \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$.

Remarque (Hors-programme)**.** Plus généralement, pour tous $x, y \in E$, on a

$$-\|x\| \times \|y\| \underbrace{\leq}_{\substack{\text{égalité si } (x,y) \text{ sont} \\ \text{négativement liés}}} \langle x \,|\, y \rangle \underbrace{\leq}_{\substack{\text{égalité si } (x,y) \text{ sont} \\ \text{positivement liés}}} \|x\| \times \|y\|$$

Dans certains contextes, on définit le *facteur de corrélation* entre x et y par la grandeur :

$$\rho(x,y) = \frac{\langle x \,|\, y \rangle}{\|x\| \,.\, \|y\|} \in [-1,1]$$

2.4 Autres inégalités des normes euclidiennes

Preuve de l'inégalité triangulaire (Théorème 41.7)

Démonstration.

$\square$

Théorème 41.10 – Seconde inégalité triangulaire

Pour tous $x, y \in E$, on a :

$$\Big| \|x\| - \|y\| \Big| \leq \|x - y\|$$

Démonstration. La seconde inégalité triangulaire se démontre à partir de la première, de la même manière qu'avec la valeur absolue ou le module. $\square$

2.5 Distances euclidiennes

Définition 41.11

On appelle distance euclidienne associée au produit scalaire $(\bullet \mid \bullet)$, l'application

$$d : \begin{array}{l} E \times E \to \mathbb{R}_+ \\ (x, y) \mapsto \|x - y\| \end{array}$$

Théorème 41.12

Soit $d : E \times E \to \mathbb{R}_+$ la distance euclidienne associée au produit scalaire $(\bullet \mid \bullet)$. Alors :

1. Séparation : $\forall x, y \in E \qquad d(x, y) = 0 \iff x = y$
2. Symétrie : $\forall x, y \in E \qquad d(x, y) = d(y, x)$
3. Inégalité triangulaire : $\forall x, y, z \in E \qquad d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

Remarque. Si E' est un $\mathbb{R}$-e.v. (pas forcément un espace préhilbertien réel), on appelle distance sur E' toute application $d : E' \times E' \to \mathbb{R}$ qui vérifie les assertions 1–2–3 ci-dessus. Une telle distance n'est pas nécessairement une distance euclidienne, i.e. il n'existe pas forcément un produit scalaire φ sur E' tel que $d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\varphi(x - y, x - y)}$.

3 Orthogonalité

3.1 Vecteurs orthogonaux

Définition 41.13

Soit $u \in E$. On dit que le vecteur u est unitaire si $\|u\| = 1$.

Exemple 10. Si $u \neq 0_E$, alors $\dfrac{u}{\|u\|}$ est unitaire.

Définition 41.14

Deux vecteurs u et v de E sont dits orthogonaux si $\langle u \,|\, v \rangle = 0$. On notera alors $u \perp v$.

Remarque. Le seul vecteur orthogonal à lui-même est le vecteur nul. En effet, si $u \perp u$, alors $\langle u \,|\, u \rangle = \|u\|^2 = 0$ donc $u = 0_E$
Si $u \perp v$, alors $v \perp u$: la relation $\perp$ est symétrique. Elle n'est cependant pas réflexive ou transitive (sauf si $E = \{0_E\}$).

Exemple 11. Les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ sont unitaires et orthogonaux deux à deux.

Théorème 41.15 – Théorème de Pythagore

Soit $u, v \in E$.

$$u \perp v \iff \|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$$

Démonstration.

□

3.2 Orthogonal d'une partie d'un e.v.

Définition 41.16

Soit A une partie de E. On appelle orthogonal de A l'ensemble

$$A^{\perp} := \left\{ v \in E \;\middle|\; \forall u \in A \quad u \perp v = 0 \right\}$$

$A^{\perp}$ est donc l'ensemble des vecteurs v de E qui sont orthogonaux à tous les vecteurs de A.

Exemple 12. Dans $\mathbb{R}^3$, si A est le plan horizontal d'équation $z = 0$, alors $A^{\perp}$ est la droite verticale d'équation $x = y = 0$.

Exemple 13. Soit $u_1 = (1, 2, -3)$ et $u_2 = (4, -1, 0)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Déterminer $\{u_1, u_2\}^\perp$.

On remarque que $\{u_1, u_2\}^\perp$ est un s.e.v. (c'est l'intersection de deux hyperplans) alors que l'ensemble $\{u_1, u_2\}$ n'est pas un s.e.v.

Théorème 41.17

Soit A une partie de E. L'ensemble $A^\perp$ est un s.e.v. de E.

Démonstration.

$\square$

A est une partie de E, ce n'est pas obligatoirement un s.e.v. ! Par contre $A^\perp$ est toujours un s.e.v. (de manière similaire, pour toute partie X d'un e.v., l'ensemble $\operatorname{Vect}(X)$ est toujours un s.e.v. même si X ne l'est pas).

Théorème 41.18

Soit A et B deux parties de E.

1. $A \subset B \implies B^\perp \subset A^\perp$
2. $A^\perp = (\operatorname{Vect} A)^\perp$
3. $A \subset (A^\perp)^\perp$

Démonstration.

Montrons enfin la troisième assertion. Soit $u \in A$. Montrons que $u \in (A^\perp)^\perp$, i.e. que pour tout vecteur $v \in A^\perp$, on a $\langle u \,|\, v \rangle = 0$. Or, comme $v \in A^\perp$ et $u \in A$, on a $\langle u \,|\, v \rangle = 0$ par définition de $A^\perp$. □

Théorème 41.19

Soit $u_1, \cdots, u_p \in E$. Alors

$$\mathrm{Vect}(u_1, \cdots, u_p)^\perp = \left\{ v \in E \;\middle|\; \forall i \in [\![1, p]\!] \quad \langle v \,|\, u_i \rangle = 0 \right\}$$

Et plus généralement, pour toute famille $(u_i)_{i \in I}$ de vecteurs de E, on a ;

$$(\mathrm{Vect}(u_i)_{i \in I})^\perp = \left\{ v \in E \;\middle|\; \forall i \in I \quad \langle v \,|\, u_i \rangle = 0 \right\}$$

Démonstration. On ne prouve que la première égalité.

□

Méthode

Lorsqu'on cherche à déterminer $A^\perp$, on peut :

- Si A est un s.e.v., chercher une famille génératrice de A et appliquer le résultat ci-dessus.
- Si A n'est pas un s.e.v., comme $A^\perp = (\mathrm{Vect}(A))^\perp$, il suffit de trouver une famille génératrice de $\mathrm{Vect}(A)$ et ensuite appliquer le résultat ci-dessus.

Exemple 14. Dans $\mathbb{R}^4$, on pose $A = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; x + y - 2z + 3t = 0 \text{ et } -x + 2y + 5z = 0 \right\}$. Déterminer $A^\perp$.

Exemple 15. On a $\{0_E\}^\perp =$ .... et $E^\perp =$ ....

4 Familles et bases orthonormées

4.1 Familles orthogonales et orthonormées

Définition 41.20

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(u_1, \cdots, u_n)$ une famille de vecteurs de E.

- On dit que la famille $(u_1, \cdots, u_n)$ est orthogonale si les vecteurs $u_1, \cdots, u_n$ sont orthogonaux deux à deux.
- On dit que la famille $(u_1, \cdots, u_n)$ est orthonormée (ou orthonormale) si elle est orthogonale et si les vecteurs $u_1, \cdots, u_n$ sont tous unitaires. De manière équivalente, cela revient à dire que

$$\forall i, j \in [\![1, n]\!] \quad \left\langle u_i \,\middle|\, u_j \right\rangle = \delta_{i,j}$$

Exemple 16. Si $(u_1, \cdots, u_n)$ est une famille orthogonale de vecteurs **non nuls** alors

$$\left(\frac{u_1}{\|u_1\|}, \cdots, \frac{u_n}{\|u_n\|} \right)$$

est une famille orthonormée.
On voit avec l'exemple ci-dessus que toute famille orthogonale de vecteurs non nuls peut être “normalisée”.

Exemple 17. On pose $E = \mathbb{R}_2[X]$ et on munit E du produit scalaire suivant :

$$\langle P \,|\, Q \rangle = P(0)Q(0) + P(1)Q(1) + P(2)Q(2)$$

Montrer que la famille $(e_0, e_1, e_2) = (1, X-1, 3X^2-6X+1)$ est une famille orthogonale de $\mathbb{R}_2[X]$ et l'orthonormaliser.

Théorème 41.21

Toute famille orthogonale de vecteurs **non nuls** est libre.
En particulier, toute famille orthonormée est libre.

Démonstration.

□

Théorème 41.22 – Pythagore généralisé

Soit $(u_1, \cdots, u_n)$ une famille orthogonale de E. Alors

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} u_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|u_i\|^2$$

Exemple 18. La diagonale d'un hypercube de côté 1 de $\mathbb{R}^n$ a pour longueur $\sqrt{n}$.

4.2 Bases orthonormées

Définition 41.23

On appelle base orthonormée toute famille de vecteurs de E qui est une base et qui est orthonormée.

Exemple 19. On reprend l'Exemple 17. La famille $\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{X-1}{\sqrt{2}}, \dfrac{3X^2-6X+1}{\sqrt{6}}\right)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}_2[X]$.

Remarque. Le Théorème qui suit est fondamental et résume à lui tout seul l'intérêt des bases orthonormées : on peut très facilement calculer les coordonnées d'un vecteur selon une base orthonormée. Une fois les coordonnées de deux vecteurs x et y calculées, on peut aisément calculer le produit scalaire $\langle x \,|\, y \rangle$ ou la norme $\|x\|$: les formules deviennent similaires à celle de la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Théorème 41.24

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base **orthonormée** de E. Soit x et y deux vecteurs de E.

1. La coordonnée de x selon le vecteur e_i est égale à $\langle x \,|\, e_i \rangle$. Autrement dit :

$$\boxed{x = \sum_{i=1}^{n} \langle x \,|\, e_i \rangle \, e_i} \qquad \text{ou encore} \qquad X := \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix} \langle x \,|\, e_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle x \,|\, e_n \rangle \end{pmatrix}$$

2. On a les identités :

$$\langle x \,|\, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle x \,|\, e_i \rangle \langle y \,|\, e_i \rangle = X^\top Y$$

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle x \,|\, e_i \rangle^2 = X^\top X$$

Démonstration. La première assertion sera prouvée ultérieurement dans ce chapitre. Pour la seconde assertion :

En particulier, $\|x\|^2 = \langle x \,|\, x \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle x \,|\, e_i \rangle \langle x \,|\, e_i \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle x \,|\, e_i \rangle^2$. □

Exemple 20. On a vu que la famille $(e_0, e_1, e_2) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{X-1}{\sqrt{2}}, \frac{3X^2-6X+1}{\sqrt{6}}\right)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}_2[X]$. Quelles sont les coordonnées du vecteur X^2 selon la base (e_0, e_1, e_2) ? Retrouver la valeur de $\|X^2\|$.

5 Supplémentaire orthogonal, projection orthogonale

5.1 Supplémentaire orthogonal

Théorème 41.25

Soit F un s.e.v. de E. On suppose F de dimension **finie**. Alors F et $F^\perp$ sont supplémentaires. Le s.e.v. $F^\perp$ est appelé le supplémentaire orthogonal de F.

De plus, si on note $(e_1, \cdots, e_p)$ une base **orthonormée** de F, alors la décomposition de tout vecteur x de E selon $F \oplus F^\perp$ est donnée par :

$$x = \underbrace{x_F}_{\in F} + \underbrace{x - x_F}_{\in F^\perp} \qquad \text{avec } x_F = \sum_{i=1}^{p} \langle x \,|\, e_i \rangle \, e_i$$

Remarque. Lorsque F est de dimension infinie, ce résultat peut tomber en défaut, cf TD.

Démonstration. Soit $(e_1, \cdots, e_p)$ une base orthonormée de F. Montrons que $E = F \oplus F^{\perp}$.

Finalement, $E = F \oplus F^{\perp}$. De plus, la preuve ci-dessus démontre aussi la décomposition voulue d'un vecteur x de E selon $F \oplus F^{\perp}$. $\square$

En particulier, si E est euclidien, alors pour tout s.e.v. F de E, on a :

$$\forall x \in E \qquad x = p_F(x) + p_{F^{\perp}}(x)$$

Théorème 41.26

Soit F un s.e.v. d'un espace **euclidien** E. On a :

- $\dim F + \dim F^{\perp} = \dim E$
- $(F^{\perp})^{\perp} = F$

Démonstration. La première assertion découle du fait que $E = F \oplus F^{\perp}$.
La seconde découle du fait que $F \subset (F^{\perp})^{\perp}$ et que, par la première assertion appliquée à F et à $F^{\perp}$, on a :

$$\begin{aligned} \dim F + \dim F^{\perp} &= \dim E \\ \dim F^{\perp} + \dim (F^{\perp})^{\perp} &= \dim E \end{aligned}$$

D'où F et $(F^{\perp})^{\perp}$ ont la même dimension, ce qui conclut. $\square$

5.2 Projection orthogonale

Définition 41.27

Soit F un s.e.v. de E. On suppose F de dimension **finie**. On appelle projecteur orthogonal sur F le projecteur sur F parallèlement à $F^{\perp}$.

Notation. On notera p_F ce projecteur dans la suite. Pour tout $x \in E$, le vecteur $y = p_F(x)$ est appelé le projeté orthogonal de x sur F.

Théorème 41.28

Soit $(e_1, \cdots, e_p)$ une base orthonormée d'un s.e.v. F de E Pour tout $x \in E$, on a :

$$p_F(x) = \sum_{i=1}^{p} \langle x \,|\, e_i \rangle \, e_i$$

Démonstration. C'est une conséquence du Théorème 41.25. □

Remarque. Pour trouver $p_F(x)$, on peut aussi chercher l'unique vecteur $y \in F$ tel que $x - y \in F^{\perp}$. En posant $y = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j e_j$, cela revient à chercher $\lambda_1, \cdots, \lambda_p \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\forall i \in [\![1, p]\!] \qquad \left\langle x - \sum_{j=1}^{p} \lambda_j e_j \,\middle|\, e_i \right\rangle = 0$$

ce qui donne un système de p équations à p inconnues qu'on peut résoudre.

Exemple 21. On reprend $E = \mathbb{R}_2[X]$ et $\langle P \,|\, Q \rangle = P(0)Q(0) + P(1)Q(1) + P(2)Q(2)$. Quelle est la projection du polynôme X^2 sur le s.e.v. $F = \text{Vect}(1, X)$.

Preuve du Théorème 41.24. En supposant E de dimension finie n et en prenant $F = E$, le Théorème 41.28 conduit à

$$p_E(x) = x = \sum_{i=1}^{n} \langle x \,|\, e_i \rangle \, e_i$$

ce qui donne la première assertion du Théorème 41.24. □

Définition 41.29

Si H est un hyperplan de E, alors $H^{\perp}$ est une droite vectorielle.
Tout vecteur u **non nul** de $H^{\perp}$ est dit normal à H.

Théorème 41.30 – Projection sur un hyperplan

On suppose que E est euclidien. Soit u un vecteur **non nul** de E et $H = \mathrm{Vect}(u)^{\perp}$.

- Si u est **unitaire**, on a :

$$\forall x \in E \qquad p_H(x) = \text{......................}$$

- Si u n'est pas unitaire, on a :

$$\forall x \in E \qquad p_H(x) = \text{......................}$$

Démonstration. On fait la preuve dans le cas général.

□

Dit autrement, si H est un hyperplan de E (euclidien) et si u est un vecteur normal à H, alors les formules ci-dessus sont valides.

5.3 Distance à un s.e.v. de dimension finie

Définition 41.31

Soit A une partie non vide de E et $x \in E$. On appelle distance de x à A la quantité

$$d(x,A) := \inf_{y \in A} d(x,y) = \inf_{y \in A} \|x - y\|$$

$d(x,A)$ est bien défini car l'ensemble $\left\{\|x-y\| \;\middle|\; y \in A\right\}$ est une partie non vide (car $A \neq \varnothing$) de $\mathbb{R}$ et minorée par 0.

Théorème 41.32

Soit F un s.e.v. de E. On suppose F de dimension **finie**. Alors il existe un unique $y \in F$ tel que $d(x,F) = d(x,y)$ qui est donné par $y = p_F(x)$. On a donc :

$$\begin{cases} d(x,F) = \|x - p_F(x)\| \\ \forall y \in F \qquad d(x,F) = \|x-y\| \iff y = p_F(x) \end{cases}$$

avec $p_F(x)$ le projeté orthogonal de x.

Remarque. Le Théorème 41.32 permet de résoudre des problèmes d'optimisation assez complexes, et constitue une des principales applications de ce chapitre en analyse, cf Exemple ci-dessous.

Exemple 22. Déterminer la valeur $I = \inf\limits_{a,b,c \in \mathbb{R}} \displaystyle\int_0^{2\pi} \left[x - \left(a + b\cos x + c\cos^2 x\right)\right]^2 dx$.

6 Algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

Théorème 41.33 – Orthonormalisation de Gram-Schmidt

Soit $\mathcal{F} = (u_1, \cdots, u_p)$ une famille **libre** de E. Alors il existe une unique famille orthonormée $(e_1, \cdots, e_p)$ de E telle que, pour tout $k \in [\![1, p]\!]$:

$$\begin{cases} \text{Vect}\,(e_1, \cdots, e_k) = \text{Vect}\,(u_1, \cdots, u_k) \\ \langle e_k \,|\, u_k \rangle > 0 \end{cases} \tag{$*$}$$

En construisant la famille $(e_1, \cdots, e_p)$, on dit qu'on a "orthonormalisé" la famille libre $(u_1, \cdots, u_p)$.

Corollaire 41.34

Si on applique l'algorithme de Gram-Schmidt à une base $(u_1, \cdots, u_p)$ de E, alors la famille $(e_1, \cdots, e_p)$ obtenue est une base orthonormée de E.

On ne montrera que l'existence et non l'unicité de la famille $(e_1, \cdots, e_p)$. La preuve est basée sur une construction explicite des vecteurs $e_1, \cdots, e_p$ et se base sur la méthode ci-dessous. Il faut savoir l'appliquer à des cas particuliers.

Méthode – Algorithme de Gram-Schmidt

Soit $(u_1, \cdots, u_p)$ une famille libre de E. On construit la famille orthonormée $(e_1, \cdots, e_p)$ qui vérifie $(*)$ de proche en proche.

1. Pour e_1, on pose $e_1 = \dfrac{u_1}{\|u_1\|}$.
2. Soit un entier $k \in [\![1, p-1]\!]$. On suppose avoir construit $e_1, e_2, \cdots, e_k$ vérifiant $(*)$. On construit e_{k+1} de la manière suivante :
   (a) On pose
   $$v_{k+1} = u_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \langle u_k \,|\, e_i \rangle \, e_i$$
   (b) Le vecteur v_{k+1} est non nul, on le normalise en posant : $e_{k+1} := \dfrac{v_{k+1}}{\|v_{k+1}\|}$.

On répète l'étape 2 jusqu'à avoir construit e_p.

Remarque. En posant $F_k = \mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_k)$ et p_{F_k} le projecteur orthogonal sur F_k, on a

$$v_{k+1} = u_{k+1} - p_{F_k}(u_{k+1})$$

On peut encore dire que v_{k+1} est le projeté orthogonal de u_{k+1} sur $F_k^{\perp}$.

Preuve de la méthode / de l'existence dans le Théorème 41.33.

Tout d'abord, Le vecteur e_1 est bien unitaire et $(*)$ est clairement vérifiée avec $k = 1$.

On suppose avoir construit une famille orthonormée $(e_1, \cdots, e_k)$ qui vérifie $(*)$. Montrons que la famille $(e_1, \cdots, e_{k+1})$ est orthonormée et vérifie encore $(*)$. Par la Remarque qui précède, on a $v_{k+1} \in F_k^{\perp}$, donc v_{k+1} est orthogonal à $e_1, \cdots, e_k$. Montrons que v_{k+1} est non nul.

- Supposons par l'absurde que $v_{k+1} = 0_E$. Alors, $u_{k+1} = p_{F_k}(u_{k+1})$, donc $u_{k+1} \in F_k$. Or, $F_k = \mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_k)$ et par $(*)$, on en déduit que $F_k = \mathrm{Vect}(u_1, \cdots, u_k)$. Ainsi, on en déduit que $u_{k+1} \in \mathrm{Vect}(u_1, \cdots, u_k)$, ce qui est absurde car $(u_1, \cdots, u_{k+1})$ est libre. Donc $v_{k+1} \neq 0_E$.
- On peut donc définir $e_{k+1} = \dfrac{v_{k+1}}{\|v_{k+1}\|}$ qui est unitaire. De plus, comme $v_{k+1} \in F_k^{\perp}$, on a de même $e_{k+1} \in F_k^{\perp}$. Donc la famille $(e_1, \cdots, e_{k+1})$ est orthonormée.
- Montrons que $\langle e_{k+1} \,|\, u_{k+1} \rangle > 0$. On a
$$\begin{aligned}\langle e_{k+1} \,|\, u_{k+1} \rangle &= \langle e_{k+1} \,|\, v_{k+1} + p_{F_k}(u_{k+1}) \rangle \\ &= \langle e_{k+1} \,|\, v_{k+1} \rangle + \langle e_{k+1} \,|\, p_{F_k}(u_{k+1}) \rangle \\ &= \langle e_{k+1} \,|\, \|v_{k+1}\| \, e_{k+1} \rangle + 0 \quad \text{car } e_{k+1} \in F_k^{\perp} \\ &= \|v_{k+1}\| \times \|e_{k+1}\|^2 \\ &> 0\end{aligned}$$
- Montrons que $\mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_{k+1}) = \mathrm{Vect}(u_1, \cdots, u_{k+1})$. Les deux familles étant libres, ces deux s.e.v. ont pour dimension $k+1$. Il suffit donc de montrer une inclusion de l'un dans l'autre. Or, comme $\mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_k) = \mathrm{Vect}(u_1, \cdots, u_k)$ par hypothèse de récurrence, on a déjà $u_1, \cdots, u_k \in \mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_{k+1})$. Enfin,
$$\begin{aligned}u_{k+1} &= v_{k+1} + p_{F_k}(u_{k+1}) \\ &= \underbrace{\|v_{k+1}\| \times e_{k+1}}_{\in \mathrm{Vect}(e_{k+1})} + \underbrace{p_{F_k}(u_{k+1})}_{\in \mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_k)}\end{aligned}$$
  donc $u_{k+1} \in \mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_{k+1})$.

La propriété est donc vérifiée au rang $k+1$. Finalement, elle est vérifiée pour tout $k \in [\![1, p]\!]$.

□

Exemple 23. On se place sur $E = \mathscr{C}^0([0, 2\pi], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire

$$\langle f \,|\, g \rangle := \int_0^{2\pi} f(t) g(t) dt$$

Appliquer l'algorithme de Gram-Schmidt sur la famille libre (f, g, h) avec $f : x \mapsto 1$, $g : x \mapsto \cos x$ et $h : x \mapsto \cos^2 x$.

Théorème 41.35

Tout espace euclidien possède des bases orthonormées.

Démonstration. Soit E un espace euclidien et $n = \dim E$. Il suffit de se donner une base de cet espace (qui existe puisque tout e.v. admet des bases) et de l'orthonormaliser. On aura une famille $(e_1, \cdots, e_n)$ orthonormée, donc libre, qui a le même cardinal que la dimension de E. Donc c'est une base orthonormée. $\square$

7 Méthodes pour les exercices

Méthode

Pour montrer qu'une application φ est un produit scalaire, on montre d'abord la symétrie, puis la linéarité selon (par exemple) la première variable, puis enfin que φ est définie positive.

Méthode

Pour déterminer $A^\perp$, on peut :

- Si A est un s.e.v., réécrire $A = \text{Vect}(\mathcal{F})$: alors $v \in A^\perp$ ssi v est orthogonal à tout vecteur de $\mathcal{F}$.
- Si A n'est pas un s.e.v., comme $A^\perp = (\text{Vect}(A))^\perp$, il suffit de trouver une famille génératrice de $\text{Vect}(A)$ et ensuite appliquer le résultat ci-dessus.

Méthode

Pour calculer le projeté orthogonal d'un vecteur $x \in E$ sur un s.e.v. F de dimension finie, on peut :

1. Trouver le vecteur $y \in F$ tel que $x - y \in F^\perp$.
2. Si on dispose d'une base orthonormée de F, on peut calculer le projeté orthogonal explicitement.

Méthode

Étant donné $u, e_1, \cdots, e_n$ dans E, les calculs d'infimum de la forme $\inf\limits_{a_1,\cdots,a_n \in \mathbb{R}} \|u - (a_1 e_1 + \ldots + a_n e_n)\|$ peuvent se reformuler comme un calcul de la distance de u au s.e.v. engendré par $(e_1, \cdots, e_n)$.